BAB 4
Invers Matrik

Pengertian

- $A=[a_{ij}]$, $i=1, 2, ..., n$; $j=1, 2, ..., n$, disebut mempunyai invers jika terdapat matrik A^{-1}, sehingga: $AA^{-1}=A^{-1}A=I$, I matrik satuan
- Jika A mempunyai invers, maka A disebut matrik **tak singular**
- Jika tidak mempunyai invers disebut matrik **singular**

Ketunggalan Invers Matrik

Jika A mempunyai invers, maka invers-nya tunggal (unik)

Andaikan B dan C invers dari A, maka dipenuhi: BA=I dan CA=I

B=IB=(CA)B=C(AB)=CI=C

Jadi, B = C, atau kedua invers matrik tersebut tunggal

Sifat-sifat invers matrik

1. $(A+B)^{-1}=A^{-1}+B^{-1}$
2. $(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$
3. $(kA)^{-1}=(1/k)A^{-1}$, dimana k: skalar (bilangan riil)
4. $$A^{-n}=\underbrace{A^{-1}A^{-1}\ldots A^{-1}}_{\text{sebanyakn kali}}=\left(\underbrace{AA\ldots A}_{\text{sebanyakn kali}}\right)^{-1},\ \text{jika}\ \ \text{n}=1,2,\ldots$$

Matrik Elementer

Definisi: Matrik elementer adalah matrik bujursangkar yang diperoleh dari matrik satuan yang sesuai, yang dikenai **hanya oleh satu** Operasi Baris Elementer

Contoh:

- $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ adalah matriks elementer yang diperoleh dengan mengalikan baris pertama matriks $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ dengan 2

- $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ adalah matriks elementer yang diperoleh dengan menjumlahkan -4 kali baris pertama pada baris ketiga dari matriks $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

- $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ adalah matriks elementer yang diperoleh dengan menukar posisi baris pertama dengan baris ketiga dari matriks $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Mana yang bukan matrik Elementer menurut anda?
mangapa?

$$E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$$

E_1 diperoleh dari matriks satuan berordo 2 x 2 yang dikenai satu operasi baris elementer yang pertama yaitu mengalikan baris kedua dengan konstanta -3

$$E_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

E_2 diperoleh dari matriks satuan 3 x 3 yang dikenai satu operasi baris elementer yang kedua yaitu menukar baris kedua dengan baris ketiga

$$E_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

E_3 dikenai operasi baris elementer yang ketiga yaitu menjumlahkan baris pertama dengan kelipatan -5 baris ketiga.

$$E_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Sementara itu, matriks E_4, bukan matriks elementer karena tidak mungkin melakukan operasi baris elementer sehingga matriks satuan menjadi matriks yang baris keduanya menjadi baris nol.

Operasi baris elementer terhadap sebuah matriks $A_{n\times n}$ menghasilkan matriks yang sama dengan perkalian kiri matriks A dengan matriks elementer yang bersesuaian dengan operasi baris tersebut.

Contoh:

Operasi baris elementer "jumlahkan -3 kali baris pertama pada baris ketiga" dari matriks $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$ menghasilkan matriks $\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 11 \end{bmatrix}$.

Matriks elementer yang bersesuaian dengan operasi baris "jumlahkan -3 kali baris pertama pada baris ketiga"adalah $E = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$, sehingga diperoleh

$$EA = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 11 \end{bmatrix}.$$

Menemukan invers dari sebuah matriks

Diberikan sebuah matriks A yang non singular. Invers dari A dapat ditemukan dengan memperluas matriks A dengan matriks I, kemudian menerapkan serangkaian operasi baris elementer terhadap $\left[A|I\right]$ sampai diperoleh $\left[I|A^{-1}\right]$

Contoh: Tentukan invers dari $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \end{bmatrix}$.

Jawab:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 8 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{\substack{[2] - 2[1] \\ [3] - [1]}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 5 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{[3] + 2[2]} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -5 & 2 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{-[3]} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & -2 & -1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{\substack{[2] + 3[3] \\ [1] - 3[3]}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & -14 & 6 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 13 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & -2 & -1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{[1] - 2[2]} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -40 & 16 & 9 \\ 0 & 1 & 0 & 13 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & -2 & -1 \end{array}\right]$$

Sehingga diperoleh:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -40 & 16 & 9 \\ 13 & -5 & -3 \\ 5 & -2 & -1 \end{bmatrix}$$

Sumber

- Alajabar linier dasar. Mahmud Imrona